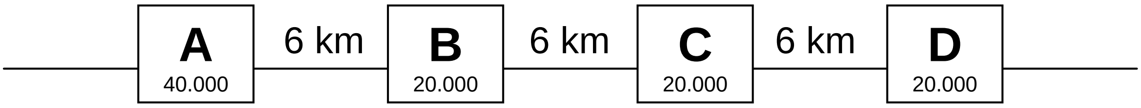
1. Entscheidung bei Unsicherheit



a) **Nutzenmatrix** (Kundenanteile von K in %)

$u(K_A,M_A) = 0{,}4\cdot60 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot60 = \mathbf{60}$
$u(K_B,M_A) = 0{,}4\cdot40 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot80 = \mathbf{64}$
$u(K_C,M_A) = 0{,}4\cdot40 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot80 = \mathbf{60}$
$u(K_D,M_A) = 0{,}4\cdot40 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot80 = \mathbf{56}$

$u(K_A,M_B) = 0{,}4\cdot80 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot40 = \mathbf{56}$
$u(K_B,M_B) = 0{,}4\cdot60 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot60 = \mathbf{60}$
$u(K_C,M_B) = 0{,}4\cdot40 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot80 = \mathbf{56}$
$u(K_D,M_B) = 0{,}4\cdot40 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot80 = \mathbf{52}$

$u(K_A,M_C) = 0{,}4\cdot80 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot40 = \mathbf{60}$
$u(K_B,M_C) = 0{,}4\cdot80 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot40 = \mathbf{64}$
$u(K_C,M_C) = 0{,}4\cdot60 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot60 = \mathbf{60}$
$u(K_D,M_C) = 0{,}4\cdot40 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot80 = \mathbf{48}$

$u(K_A,M_D) = 0{,}4\cdot80 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot40 + 0{,}2\cdot40 = \mathbf{64}$
$u(K_B,M_D) = 0{,}4\cdot80 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot40 = \mathbf{68}$
$u(K_C,M_D) = 0{,}4\cdot80 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot80 + 0{,}2\cdot40 = \mathbf{72}$
$u(K_D,M_D) = 0{,}4\cdot60 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot60 + 0{,}2\cdot60 = \mathbf{60}$

	M_A	M_B	M_C	M_D
K_A	60	56	60	64
K_B	64	60	64	68
K_C	60	56	60	72
K_D	56	52	48	60

b) Dominanzen und Entscheidungskriterien

Es gilt: $K_A \geq K_D$, $K_B \geq K_A$, $K_B \geq K_D$, $K_C \geq K_A$, $K_C \geq K_D$

	M_A	M_B	M_C	M_D	(1)	(2)	(3)	(4)
K_A	60	56	60	64	56	64	$8\delta+56$	240
K_B	64	60	64	68	**60**	68	$\mathbf{8\delta+60}$	**256**
K_C	60	56	60	72	56	**72**	$\mathbf{16\delta+56}$	248
K_D	56	52	48	60	48	60	$12\delta+48$	216

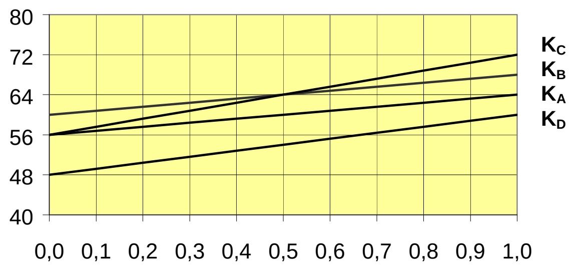
	64	60	64	72	(5)
K_A	4	4	4	8	8
K_B	0	0	0	4	**4**
K_C	4	4	4	0	**4**
K_D	8	8	16	12	16

(1) Minimax-Kriterium: $\mathbf{K_B}$

(2) Maximax-Kriterium: $\mathbf{K_C}$

(3) Hurwicz-Kriterium: $\mathbf{K_B}$ **für** $\mathbf{0 \leq \delta \leq 0{,}5}$
$\mathbf{K_C}$ **für** $\mathbf{0{,}5 \leq \delta \leq 1}$

Präferenzfunktion $\Phi_i(\delta)$



(4) Laplace-Kriterium: $\mathbf{K_B}$

(5) Savage-Kriterium: $\mathbf{K_B}$ **oder** $\mathbf{K_C}$

2. Entscheidung bei Unsicherheit/Risiko

a) Entscheidungskriterien bei Unsicherheit

	Z_1	Z_2	Z_3	(1)	(2)	(3)	(4)
A_1	1500	800	100	100	**1500**	$1400\delta + 100$	**2400**
A_2	1000	700	400	400	1000	$600\delta + 400$	2100
A_3	500	600	700	**500**	700	$200\delta + 500$	1800

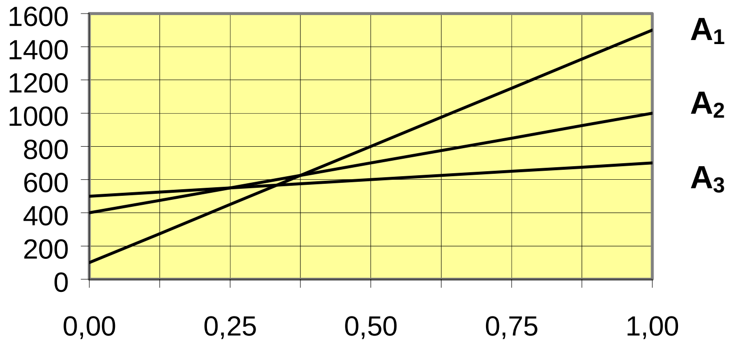
	1500	800	700	(5)
A_1	0	0	600	600
A_2	500	100	300	**500**
A_3	1000	200	0	1000

(1) Minimax-Kriterium: $\mathbf{A_3}$

(2) Maximax-Kriterium: $\mathbf{A_1}$

(3) Hurwicz-Kriterium:
$\mathbf{A_3}$ **für** $0 \leq \delta \leq 0{,}25$
$\mathbf{A_2}$ **für** $0{,}25 \leq \delta \leq 0{,}375$
$\mathbf{A_1}$ **für** $0{,}375 \leq \delta \leq 1$

Präferenzfunktion $\Phi_i(\delta)$



(4) Laplace-Kriterium: $\mathbf{A_1}$

(5) Savage-Kriterium: $\mathbf{A_2}$

b) „Klassische“ Entscheidungskriterien bei Risiko

$p_j \rightarrow$	0,2	0,5	0,3				
	Z_1	**Z_2**	**Z_3**	μ_i	σ_i^2	σ_i	μ_i-0,25σ_i
A_1	1500	800	100	**730**	240100	490	607,5
A_2	1000	700	400	670	44100	210	**617,5**
A_3	500	600	700	610	4900	70	592,5

μ-Kriterium: **A_1**

(μ,σ)-Kriterium: **A_2** (für k=0,25)

3. Entscheidung bei Risiko

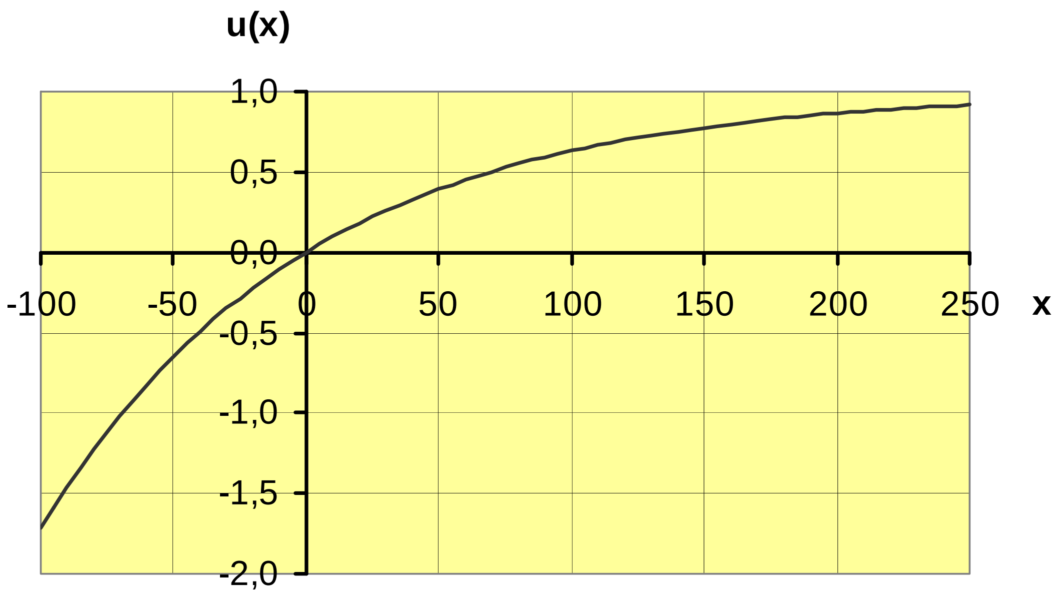
a) „Klassische“ Entscheidungskriterien

$p_j \rightarrow$	0,3	0,5	0,2			
	Z_1	**Z_2**	**Z_3**	μ_i	σ_i^2	$\mu_i - \sigma_i$
A_1	250	150	-100	**130**	15100	7,12
A_2	150	120	50	115	1225	**80,00**
A_3	60	80	120	82	436	61,12

μ-Kriterium: **A_1**

(μ,σ)-Kriterium: **A_2** (für k=1)

b) Risikonutzenfunktion $u(x) = 1 - e^{-x/100}$



monoton steigender und **konkaver** Verlauf

$\Rightarrow$ Risikoaversion

c) Bernoulli-Prinzip

$p_j \rightarrow$	0,3	0,5	0,2				
	Z_1	Z_2	Z_3	$E[U(X_i)]$	s_i *)	$E[X_i]$	π_i
A_1	0,918	0,777	-1,718	0,3202	38,6	130	91,4
A_2	0,777	0,699	0,393	**0,6612**	**108,2**	115	6,8
A_3	0,451	0,551	0,699	0,5505	80,0	82	2,0

$\Rightarrow$ optimale Aktion: **A_2**

*) Berechnung der Sicherheitsäquivalente:

$$1 - e^{-s_i/100} \overset{!}{=} E\left[U(X_i)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-s_i/100} = 1 - E\left[U(X_i)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{s_i}{100} = \ln(1 - E\left[U(X_i)\right])$$

$$\Leftrightarrow \quad s_i = -100 \cdot \ln(1 - E\left[U(X_i)\right])$$

4. Bayes-Analyse

a) Bestimmung der Aposteriori-Wahrscheinlichkeiten

- Apriori-Wahrscheinlichkeiten $P(Z_j)$ und bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(I_k|Z_j)$

$P(Z_j) \rightarrow$	0,3	0,5	0,2
$P(I_k\|Z_j)$	**Z_1**	**Z_2**	**Z_3**
I_1	0,7	0,3	0,1
I_2	0,2	0,4	0,2
I_3	0,1	0,3	0,7

$\Rightarrow$ • Informations-Wahrscheinlichkeiten $P(I_k)$ [1)] und Aposteriori-Wahrscheinlichkeiten $P(Z_j|I_k)$ [2)]

$P(I_k)$ $\downarrow$	**$P(Z_j\|I_k)$**	**Z_1**	**Z_2**	**Z_3**
0,38	**I_1**	0,55263	0,39474	0,05263
0,30	**I_2**	0,20000	0,66667	0,13333
0,32	**I_3**	0,09375	0,46875	0,43750

Berechnungsbeispiele:

1) $$P(I_1) \overset{(1.56)}{=} 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}38$$

2) $$P(Z_1 | I_1) \overset{(1.57)}{=} \frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{0{,}38} = 0{,}55263$$

b*) Bayes-Kriterium und Bewertung der Information

	$E[U_i \mid I_1]$	$E[U_i \mid I_2]$	$E[U_i \mid I_3]$
A_1	0,7235	0,4724	-0,3015
A_2	**0,7259**	**0,6737**	0,5725
A_3	0,5035	0,5505	**0,6062**

$\Rightarrow$ optimale Strategie S_{t^*} : $\mathbf{I_1 \rightarrow A_2}$ $\mathbf{I_2 \rightarrow A_2}$ $\mathbf{I_3 \rightarrow A_3}$

- erwarteter Nutzen der optimalen Strategie:

  $E[U_{t^*}] = 0{,}38 \cdot 0{,}7259 + 0{,}30 \cdot 0{,}6737 + 0{,}32 \cdot 0{,}6062 = \mathbf{0{,}6719}$

- Sicherheitsäquivalent der optimalen Strategie:

  $s_{t^*} = -100 \ln(1-0{,}6719) = \mathbf{111{,}4}$ [1000 €]

- Obergrenze für die Kosten des Markttests:

  $K < s_{t^*} - s_{i^*} = 111{,}4 - 108{,}2 = \mathbf{3{,}2}$ [1000 €]

- Effizienz der Information:

$$U_{PI} = \max_t E[U_t] - \max_i E[U_i] = 0{,}6719 - 0{,}6612 = \mathbf{0{,}0108}$$

$$U_{VI} = \sum_j (p_j \max_i u_{ij}) - \max_i E[U_i]$$
$$= (0{,}3 \cdot 0{,}918 + 0{,}5 \cdot 0{,}777 + 0{,}2 \cdot 0{,}699) - 0{,}6612 = \mathbf{0{,}1424}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{U_{PI}}{U_{VI}} = \frac{0{,}0108}{01424} = \mathbf{0{,}076}$$

5. Entscheidung bei Risiko

a) Dominanzen und einfache Entscheidungskriterien

- Es gilt: $A_1 \leq A_2$ $A_1 \leq A_3$
- effiziente Aktionen: **A_2, A_3, A_4**

	Z_1	Z_2	Z_3	(1)	(2)	(3)
A_1	-5	0	8	-5	1	-2,0
A_2	-3	0	9	**-3**	2	-0,5
A_3	-4	4	15	-4	5	**0,5**
A_4	-10	8	20	-10	**6**	-2,0

- optimale Aktion nach dem …

(1) Minimax-Kriterium: **A_2**

(2) μ-Kriterium: **A_4**

(3) Hodges-Lehmann-Kriterium: **A_3**

b) Bernoulli-Prinzip

$P_j \rightarrow$	1/3	1/3	1/3				
	Z_1	Z_2	Z_3	$E[U(X_i)]$	s_i	$E[X_i]$	π_i
A_2	0,583	0,667	0,792	0,6806	0,652	2,000	1,348
A_3	0,545	0,737	0,833	**0,7052**	**1,961**	5,000	3,039
A_4	0	0,783	0,857	0,5466	-3,973	6,000	9,973

- optimale Aktion: **A_3**
- Risikoaversion, da positive Risikoprämien

c) Bayes-Analyse

- Apriori-Wahrscheinlichkeiten $P(Z_j)$ und bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(I_k|Z_j)$:

$P(Z_j) \rightarrow$	1/3	1/3	1/3
$P(I_k\|Z_j)$	**Z_1**	**Z_2**	**Z_3**
I_1	1/6	1/2	2/3
I_2	5/6	1/2	1/3

$\Rightarrow$
- Informations-Wahrscheinlichkeiten $P(I_k)$ und Aposteriori-Wahrscheinlichkeiten $P(Z_j|I_k)$:

$P(I_k) \downarrow$	**$P(Z_j\|I_k)$**	**Z_1**	**Z_2**	**Z_3**
4/9	**I_1**	0,125	0,375	0,500
5/9	**I_2**	0,500	0,300	0,200

- Bayes-Kriterium:

	$E[U_i\|I_1]$	**$E[U_i\|I_2]$**
A_2	0,71875	0,65000
A_3	**0,76116**	**0,66045**
A_4	0,72205	0,40621

$\Rightarrow$ optimale Strategie S_{t^*} : **$I_1 \rightarrow A_3$** **$I_2 \rightarrow A_3$**

- Sicherheitsäquivalent: $s_{t^*} = s_3 =$ **1,961** (s.o.)

- Kundenbefragung lohnt nicht, da $U_{PI} = 0$

6. Nullsummen-Spiel

a) Gewinnmatrizen für Tages- und Nachtüberfahrten
(Beförderungsanteile von A in %)

Tag	**B_1** (110)	**B_2** (130)
A_1 (120)	40	60
A_2 (100)	60	60
A_3 (180)	40	40

Nacht	**B_1 (70)**	**B_2 (90)**
A_1 (80)	40	60
A_2 (100)	40	40
A_3 (60)	60	60

b) Gewinnmatrix für alle Überfahrten

Tag & Nacht	**B_1**	**B_2**	$\min_j g_{ij}$
A_1	40	60	40
A_2	**55**	55	**55**
A_3	45	45	45
$\max_i g_{ij}$	**55**	60	

- Dominanzen: $A_3 \leq A_2$ $B_2 \leq B_1$

c) Minimax-Lösung

- reine Minimax-Strategien: **(A_2,B_1)**
- Beförderungsanteile: A: **55%** B: **45%**
- Die Minimax-Lösung ist ein Sattelpunkt, weil kein Spieler Anlass hat, von dieser Lösung abzuweichen.

7. Nullsummen-Spiel

a) Reine Strategien

	B_1	B_2	B_3	$\min_j g_{ij}$
A_1	0,4	0,4	0,5	0,4
A_2	0,5	**0,6**	0,5	**0,5**
A_3	0,8	0,3	0,7	0,3
$\max_i g_{ij}$	0,8	**0,6**	0,7	

- effiziente Strategien: **A_2, A_3** **B_1, B_2, B_3**
- Aktion A_1 nicht sinnvoll, da A_1 von A_2 dominiert wird.
- Aktion B_1 nicht sinnvoll, da – wenn A_1 ausscheidet – B_3 vorteilhafter ist als B_1.
- Minimax-Lösung: **(A_2,B_2)**
- Gästeanteile: A: **60%** B: **40%**
- Die reine Minimax-Lösung (A_2,B_2) ist **kein Sattelpunkt**, weil sich B von B_2 (Gästeanteil 40%) nach B_1 oder B_3 (Gästeanteil jeweils 50%) verbessern kann.

b*) Gemischte Strategien

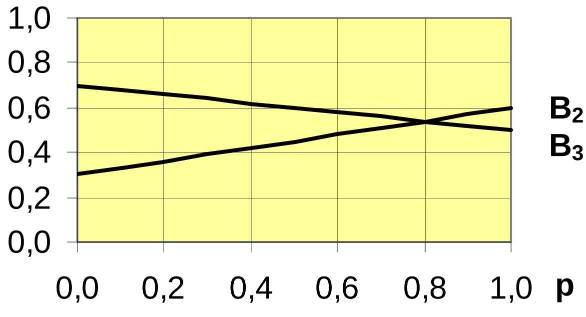
		q	1-q	
		B_2	B_3	$E\left[G^B \mid A_i, q\right]$
p	A_2	0,6	0,5	0,5–0,1q
1-p	A_3	0,3	0,7	0,3+0,4q
$E\left[G^A \mid p, B_j\right]$		0,3+0,3p	0,7–0,2p	

- Berechnung der Erwartungswerte:

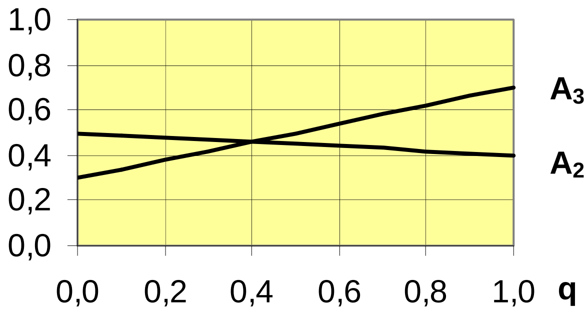
$$E\left[G^A \mid p, B_2\right] = 0{,}6\,p + 0{,}3\,(1-p) = \mathbf{0{,}3 + 0{,}3p}$$
$$E\left[G^A \mid p, B_3\right] = 0{,}5\,p + 0{,}7\,(1-p) = \mathbf{0{,}7 - 0{,}2p}$$
$$E\left[G^B \mid A_2, q\right] = 1 - \left[0{,}6\,q + 0{,}5\,(1-q)\right] = \mathbf{0{,}5 - 0{,}1q}$$
$$E\left[G^B \mid A_3, q\right] = 1 - \left[0{,}3\,q + 0{,}7\,(1-q)\right] = \mathbf{0{,}3 + 0{,}4q}$$

- Minimax-Strategien

Erwarteter Gästeanteil von A



Erwarteter Gästeanteil von B



$\Rightarrow$ $p^* = \mathbf{0{,}8}$ $q^* = \mathbf{0{,}4}$

- erwartete Gästeanteile: A: **54%** B: **46%**

8. Nicht-Nullsummen-Spiel

Tages-Überfahrten

a) Berechnung der Umsätze von A und B:

$G^A(A_1,B_1) = 0{,}4 \cdot 120 = \mathbf{48}$ $G^B(A_1,B_1) = 0{,}6 \cdot 110 = \mathbf{66}$

$G^A(A_1,B_2) = 0{,}6 \cdot 120 = \mathbf{72}$ $G^B(A_1,B_2) = 0{,}4 \cdot 130 = \mathbf{52}$

$G^A(A_2,B_1) = 0{,}6 \cdot 100 = \mathbf{60}$ $G^B(A_2,B_1) = 0{,}4 \cdot 110 = \mathbf{44}$

$G^A(A_2,B_2) = 0{,}6 \cdot 100 = \mathbf{60}$ $G^B(A_2,B_2) = 0{,}4 \cdot 130 = \mathbf{52}$

$G^A(A_3,B_1) = 0{,}4 \cdot 180 = \mathbf{72}$ $G^B(A_3,B_1) = 0{,}6 \cdot 110 = \mathbf{66}$

$G^A(A_3,B_2) = 0{,}4 \cdot 180 = \mathbf{72}$ $G^B(A_3,B_2) = 0{,}6 \cdot 130 = \mathbf{78}$

$\Rightarrow$ **Gewinnmatrix** (Umsätze von A und B pro Fahrzeug)

	B_1 (110)	**B_2** (130)	$\min\limits_j g_{ij}^A$
A_1 (120)	(48,66)	(72,52)	48
A_2 (100)	(60,44)	(60,52)	60
A_3 (180)	(72,66)	**(72,78)**	**72**
$\min\limits_i g_{ij}^B$	44	**52**	

b) Minimax-Lösung

- reine Minimax-Strategien: $\mathbf{(A_3,B_2)}$
- Umsätze: A: **72** [€/Fahrzeug]
B: **78** [€/Fahrzeug]
- (A_3,B_2) ist ein **Nash-Gleichgewicht!**

Nacht-Überfahrten

a) Berechnung der Umsätze von A und B:

$G^A(A_1,B_1) = 0{,}4\cdot\ 80 = \mathbf{32}$ $G^B(A_1,B_1) = 0{,}6\cdot 70 = \mathbf{42}$

$G^A(A_1,B_2) = 0{,}6\cdot\ 80 = \mathbf{48}$ $G^B(A_1,B_2) = 0{,}4\cdot 90 = \mathbf{36}$

$G^A(A_2,B_1) = 0{,}4\cdot 100 = \mathbf{40}$ $G^B(A_2,B_1) = 0{,}6\cdot 70 = \mathbf{42}$

$G^A(A_2,B_2) = 0{,}4\cdot 100 = \mathbf{40}$ $G^B(A_2,B_2) = 0{,}6\cdot 90 = \mathbf{54}$

$G^A(A_3,B_1) = 0{,}6\cdot\ 60 = \mathbf{36}$ $G^B(A_3,B_1) = 0{,}4\cdot 70 = \mathbf{28}$

$G^A(A_3,B_2) = 0{,}6\cdot\ 60 = \mathbf{36}$ $G^B(A_3,B_2) = 0{,}4\cdot 90 = \mathbf{36}$

$\Rightarrow$ **Gewinnmatrix** (Umsätze von A und B pro Fahrzeug)

	B_1 (70)	**B_2** (90)	$\min\limits_j g_{ij}^A$
A_1 (80)	(32,42)	(48,36)	32
A_2 (100)	(40,42)	**(40,54)**	**40**
A_3 (60)	(36,28)	(36,36)	36
$\min\limits_i g_{ij}^B$	28	**36**	

b) Minimax-Lösung

- reine Minimax-Strategien: **(A_2,B_2)**
- Umsätze: A: **40** [€/Fahrzeug]
B: **54** [€/Fahrzeug]
- (A_2,B_2) ist **kein Nash-Gleichgewicht**, weil A seinen Umsatz von 40 auf 48 [€/Fahrzeug] erhöhen kann, wenn er statt des Tarifs A_2 den Tarif A_1 wählt.

c*) Umsatz-Erwartungswerte von A und B

		1/2	1/2	
		B_1 (70)	**B_2** (90)	$E\left[(G^A,G^B)\middle\vert A_i,q\right]$
2/3	**A_1** (80)	(32;42)	(48;36)	(**40** ;39)
1/3	**A_2** (100)	(40;42)	(40;54)	(**40** ;48)
0	**A_3** (60)	(36;28)	(36;36)	(36 ;32)
$E\left[(G^A,G^B)\middle\vert p,B_j\right]$		(34,7; **42**)	(45,3; **42**)	(**40** ; **42**)

- erwartete Umsätze: A: **40** [€/Fahrzeug]
  B: **42** [€/Fahrzeug]

- Die beiden gemischten Strategien bilden ein **Nash-Gleichgewicht!**

9. Matrizenrechnung / Lineare Algebra

a) Lineare (Un-)Abhängigkeit

- Spaltenvektoren von **X** :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcrcrl} (1): & & & k_2 & + & 2\,k_3 & = 0 \\ (2): & k_1 & + & 2\,k_2 & + & 3\,k_3 & = 0 \\ (3): & 2\,k_1 & + & 3\,k_2 & + & 4\,k_3 & = 0 \\ (4): & 3\,k_1 & + & 4\,k_2 & + & 5\,k_3 & = 0 \\ (5): & 4\,k_1 & & & + & 6\,k_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ (2) – 2·(1) : $k_1 - k_3 = 0$ $\Rightarrow$ $k_1 = k_3$

$\Rightarrow$ in (5) : $4\,k_1 + 6\,k_1 = 10\,k_1 = 0$ $\Rightarrow$ $k_1 = k_3 = 0$

$\Rightarrow$ in (1) : $k_2 = 0$

$\Rightarrow$ Spaltenvektoren $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ und $\mathbf{x_3}$ linear **unabhängig**

- Zeilenvektoren von **X** :

linear **abhängig**, weil die <u>Anzahl</u> (5) die <u>Dimension</u> (3) übersteigt.

b) Matrizenmultiplikation

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{30} & \mathbf{20} & \mathbf{50} \\ \mathbf{20} & \mathbf{30} & \mathbf{40} \\ \mathbf{50} & \mathbf{40} & \mathbf{90} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{11} & \mathbf{14} & \mathbf{12} \\ \mathbf{8} & \mathbf{14} & \mathbf{20} & \mathbf{26} & \mathbf{22} \\ \mathbf{11} & \mathbf{20} & \mathbf{29} & \mathbf{38} & \mathbf{32} \\ \mathbf{14} & \mathbf{26} & \mathbf{38} & \mathbf{50} & \mathbf{42} \\ \mathbf{12} & \mathbf{22} & \mathbf{32} & \mathbf{42} & \mathbf{52} \end{pmatrix}$$

c) Matrixinversion

I	y_1	y_2	y_3
e_1	**30**	**20**	**50**
e_2	20	**30**	40
e_3	50	**40**	90

Y

→

II	y_1	e_1	y_3
y_2	1,5	0,05	**2,5**
e_2	-25,0	-1,5	**-35,0**
e_3	**-10,0**	**-2,0**	**-10,0**

→

III	y_1	e_1	e_3
y_2	**-1,0**	-0,45	0,25
e_2	**10,0**	**5,5**	**-3,5**
y_3	**1,0**	0,2	-0,1

→

IV	e_2	e_1	e_3
y_2	0,1	0,1	-0,1
y_1	0,1	0,55	-0,35
y_3	-0,1	-0,35	0,25

→

IV'	e_1	e_2	e_3
y_1	0,55	0,1	-0,35
y_2	0,1	0,1	-0,1
y_3	-0,35	-0,1	0,25

$\mathbf{Y}^{-1}$

Probe:

$$\mathbf{Y}^{-1}\cdot\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}0{,}55 & 0{,}1 & -0{,}35\\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}1\\ -0{,}35 & -0{,}1 & 0{,}25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & 20 & 50\\ 20 & 30 & 40\\ 50 & 40 & 90\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

d*) Linearkombinationen

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 20 & 30 & 40 \\ 50 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{k_{11}} \\ \mathbf{k_{21}} \\ \mathbf{k_{31}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 20 & 30 & 40 \\ 50 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{k_{12}} \\ \mathbf{k_{22}} \\ \mathbf{k_{32}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 20 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 20 & 30 & 40 \\ 50 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit $\mathbf{Y}^{-1}$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}1 & -0{,}35 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}35 & -0{,}1 & 0{,}25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 20 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1{,}5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 20 & 30 & 40 \\ 50 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 20 & 30 & 40 \\ 50 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1{,}5} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

10. Lineare Gleichungssysteme

a) Reguläres System

I	a_1	a_2	a_3	b
e_1	2	1	**-1**	0
e_2	3	-1	**2**	17
e_3	**-1**	**2**	**<u>1</u>**	**-9**

$\rightarrow$

II	a_1	a_2	b
e_1	**<u>1</u>**	**3**	**-9**
e_2	**5**	-5	35
a_3	**-1**	2	-9

$\rightarrow$

III	a_2	b
a_1	**3**	-9
e_2	**-<u>20</u>**	**80**
a_3	**5**	-18

$\rightarrow$

IV	b
a_1	3
a_2	-4
a_3	2

$\Rightarrow$ k = m = n = 3 $\Rightarrow$ Fall I

$$\overset{(2.65)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \right\}$$

b) System mit Rangdefekt

I	a_1	a_2	a_3	**b**
e_1	$\underline{\mathbf{1}}$	**2**	**-2**	**-6**
e_2	**-1**	1	2	9
e_3	**3**	3	-6	-21

→

II	a_2	a_3	**b**
a_1	**2**	-2	-6
e_2	$\underline{\mathbf{3}}$	**0**	**3**
e_3	**-3**	0	-3

→

III	a_3	**b**
a_1	-2	-8
a_2	0	1
e_3	0	$\underline{\mathbf{0}}$

$\Rightarrow$ k = 2 **<** min {m,n} = 3 $\Rightarrow$ Fall IV b)

$$\overset{(2.70)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\mathbf{8} + \mathbf{2x_3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{x_3} \end{pmatrix} \;\middle|\; \mathbf{x_3} \in \mathbf{R} \right\}$$

c) System mit Rangdefekt

I	a_1	a_2	a_3	b
e_1	**<u>1</u>**	**1**	**1**	**3**
e_2	**2**	1	-1	2
e_3	**1**	0	-2	1

$\rightarrow$

II	a_2	a_3	b
a_1	**1**	1	3
e_2	**-<u>1</u>**	**-3**	**-4**
e_3	**-1**	-3	-2

$\rightarrow$

III	a_3	b
a_1	-2	-1
a_2	3	4
e_3	0	**<u>2</u>**

$\Rightarrow$ k = 2 **<** min {m,n} = 3 $\quad\Rightarrow$ Fall IV a)

$\overset{(2.69)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{L} = \{\ \}$

d) Reguläres System

I	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1	2	-1	**1**	2	5
e_2	-2	-1	**2**	-1	-9
e_3	**4**	**-2**	**1**	**-2**	**-7**
e_4	1	1	**-2**	3	14

→

II	a_1	a_2	a_4	b
e_1	**-2**	**1**	**4**	**12**
e_2	-10	**3**	3	5
a_3	4	**-2**	-2	-7
e_4	9	**-3**	-1	0

→

III	a_1	a_4	b
a_2	**-2**	4	12
e_2	**-4**	**-9**	**-31**
a_3	**0**	6	17
e_4	**3**	11	36

→

IV	a_4	b
a_2	**8,50**	27,50
a_1	**2,25**	7,75
a_3	**6,00**	17,00
e_4	**4,25**	**12,75**

→

V	b
a_2	2
a_1	1
a_3	-1
a_4	3

$k = m = n = 4 \qquad \Rightarrow$ Fall I

$$\overset{(2.65)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \right\}$$

11. Lineare Gleichungssysteme

a*) Basislösungen

- Berechnung einer ersten Basislösung:

I	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
e_1	**<u>1</u>**	**-2**	**4**	**-1**	**3**	**2**
e_2	**3**	-1	7	-3	-1	6
e_3	**1**	3	-1	-1	-7	2

II	a_2	a_3	a_4	a_5	b
a_1	**-2**	4	-1	3	2
→ e_2	**<u>5</u>**	**-5**	**0**	**-10**	**0**
e_3	**5**	-5	0	-10	0

III	a_3	a_4	a_5	b
a_1	2	-1	-1	2
→ a_2	-1	0	-2	0
e_3	0	0	0	**<u>0</u>**

$\Rightarrow$ 1. Basislösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Berechnung der übrigen Basislösungen:

III	a_3	a_4	a_5	b
a_1	**2**	-1	-1	2
a_2	**-1**	**0**	**-2**	**0**

→

IV	a_2	a_4	a_5	b
a_1	2	-1	**-5**	2
a_3	**-1**	**0**	**2**	**0**

→

V	a_2	a_4	a_3	b
a_1	**-0,5**	**-1**	**2,5**	**2**
a_5	-0,5	**0**	0,5	0

→

VI	a_2	a_1	a_3	b
a_4	0,5	-1	**-2,5**	-2
a_5	**-0,5**	**0**	**0,5**	**0**

→

VII	a_2	a_1	a_5	b
a_4	**-2**	-1	5	-2
a_3	**-1**	**0**	**2**	**0**

→

VIII	a_3	a_1	a_5	b
a_4	**-2**	**-1**	**1**	**-2**
a_2	-1	0	**-2**	0

→

IX	a_3	a_1	a_4	b
a_5	**-2**	**-1**	**1**	**-2**
a_2	**-5**	-2	2	-4

→

X	a_5	a_1	a_4	b
a_3	**-0,5**	0,5	-0,5	1
a_2	**-2,5**	**0,5**	**-0,5**	**1**

→

XI	a_2	a_1	a_4	b
a_3	-0,2	0,4	-0,4	0,8
a_5	-0,4	-0,2	0,2	-0,4

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}8 \\ 0 \\ -0{,}4 \end{pmatrix} \right\}$$

Bemerkungen zu den Basislösungen

- Da für jede Basislösung aus den 5 Spaltenvektoren der Matrix **A** je 2 Basisvektoren ausgewählt werden, gibt es maximal $\binom{5}{2} = 10$ Basislösungen.

- Diese Zahl reduziert sich auf 9 Basislösungen, weil die Spaltenvektoren $\mathbf{a_1}$ und $\mathbf{a_4}$ **linear abhängig** sind und somit nicht gleichzeitig Basisvektoren sein können. Aus den Tableaus III bis VIII geht jeweils hervor, dass gilt:

$$\mathbf{a_4} = -\,\mathbf{a_1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a_1} = -\,\mathbf{a_4}\,.$$

- Ferner liefern die Tableaus III bis V sowie VI bis VIII jeweils dieselben Basislösungen (Dreifachlösungen). Somit existieren insgesamt nur 5 **verschiedene** Basislösungen.

- Dass es sich um Dreifachlösungen handelt, erkennt man – etwa im Tableau III – daran, dass die **Basisvariable** x_2 gleich 0 ist. (Die Nicht-Basisvariablen sind ohnehin in der Basislösung gleich 0.)

  Beim Basistausch $\mathbf{a_2} \leftrightarrow \mathbf{a_3}$ bzw. $\mathbf{a_2} \leftrightarrow \mathbf{a_5}$ bleibt $x_2=0$, und für die neue Basisvariable x_3 bzw. x_5 gilt auch wieder $x_3=0$ bzw. $x_5=0$, weil die Pivotzeile nur durch das Pivotelement dividiert wird.

- Somit kann auf die Berechnung der schattierten Tableaus IV bis VII verzichtet werden.

b*) Allgemeine Lösung

III	a_3	a_4	a_5	b
a_1	2	-1	-1	2
a_2	-1	0	-2	0
e_3	0	0	0	**<u>0</u>**

$\Rightarrow$ k = 2 < min {m,n} = 3 $\quad\Rightarrow$ **Fall IV b)**

$$\overset{(2.70)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-2x_3+x_4+x_5 \\ x_3+2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

Bemerkung:

Die allgemeine Lösung kann ebenso aus den Tableaus IV bis XI abgelesen werden (mit anderen frei wählbaren Nicht-Basisvariablen).

12. Darstellungsformen eines LP

a) Elimination von x_1 aus dem LP

$$
\begin{array}{llcccl}
\text{Z:} & (50 +)\ 50\,x_2 + 30\,x_3 + 10\,x_4 \rightarrow \text{min !} \\
\text{N:} & 2\,x_2 + x_3 \geq 12 \\
 & 2\,x_3 + 4\,x_4 \geq 8 \\
\text{V:} & x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0
\end{array}
$$

b) Darstellung des LP

- Standardform:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Z:} & (-50) - 50\,x_2 - 30\,x_3 - 10\,x_4 \rightarrow \text{max !} \\
\text{N:} & -2\,x_2 - x_3 \leq -12 \\
 & -2\,x_3 - 4\,x_4 \leq -8 \\
\text{V:} & x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0
\end{array}
$$

- Normalform:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Z:} & (-50) - 50\,x_2 - 30\,x_3 - 10\,x_4 \rightarrow \text{max !} \\
\text{N:} & 2\,x_2 + x_3 - x_{S1} = 12 \\
 & 2\,x_3 + 4\,x_4 - x_{S2} = 8 \\
\text{V:} & x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_{S1} \geq 0 \quad x_{S2} \geq 0
\end{array}
$$

- Kanonische Form mit Basisvariablen x_2 und x_4: *)

$$
\boxed{
\begin{array}{lllllll}
Z: & (-50) - 50\,x_2 - 30\,x_3 - 10\,x_4 \;\rightarrow\; \max ! & & & & & \\[1ex]
N: & x_2 + 0{,}5\,x_3 & & -\,0{,}5\,x_{S1} & & = & 6 \\
 & \phantom{x_2 +{}} 0{,}5\,x_3 + & x_4 & & -\,0{,}25\,x_{S2} & = & 2 \\[1ex]
V: & x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_{S1} \geq 0 & x_{S2} \geq 0 & &
\end{array}
}
$$

⇒ • zulässige Basislösung:

($x_1=5$) x_2 = **6** x_3 = **0** x_4 = **2** x_{S1} = **0** x_{S2} = **0**

*) Formale Berechnung d. Koeffizienten u. Kapazitäten:

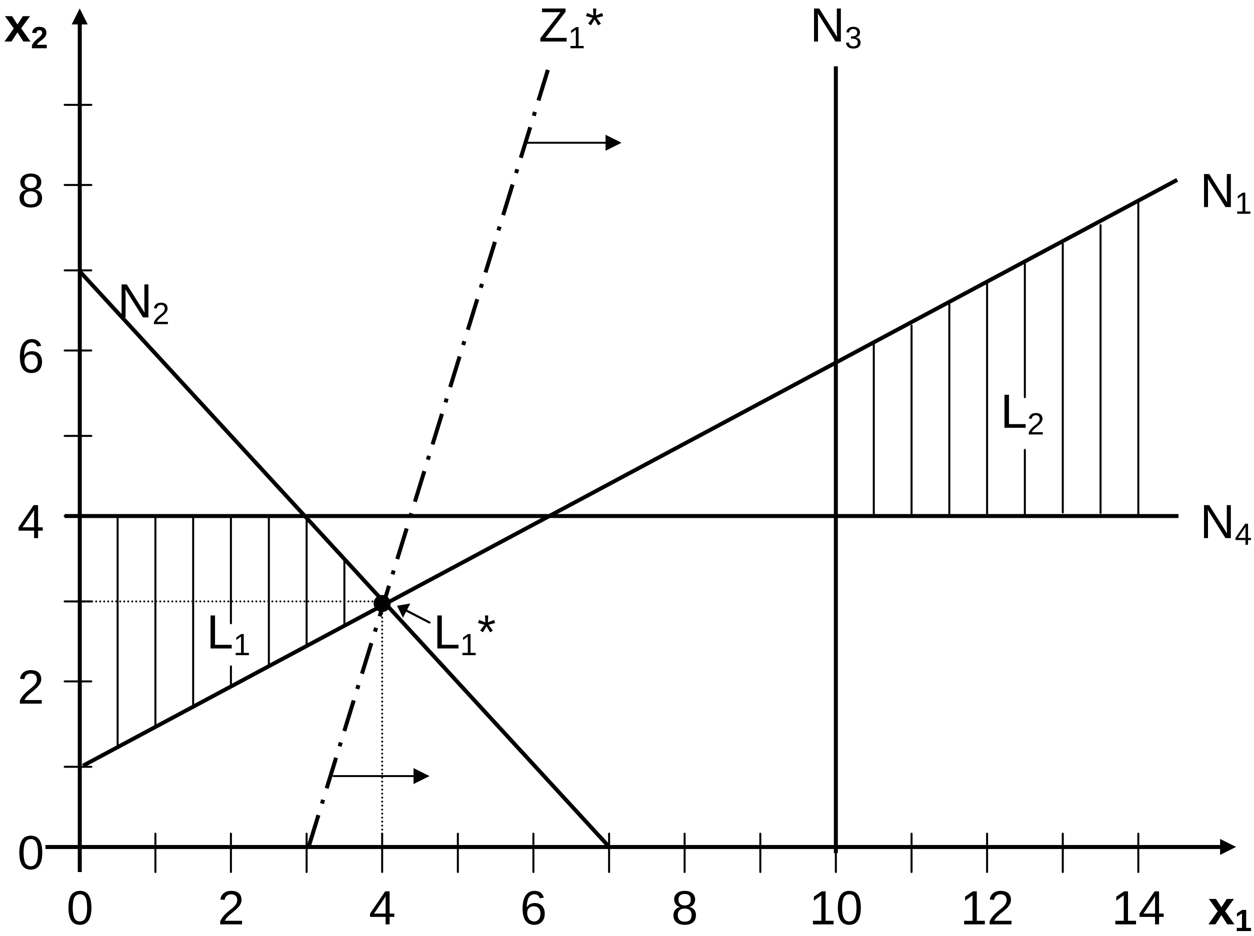
$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}5} & \mathbf{-0{,}5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0{,}5} & \mathbf{0} & \mathbf{-0{,}25} \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}
$$

13. Grafische Lösung eines LP



- **Optimallösung von LP_1:**

$$L_1^* = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \right\} \qquad Z_1^* = 3 \cdot 4 - 3 = \mathbf{9}$$

- **Optimallösung von LP_2:**

existiert nicht (unbeschränkte Zielfunktion),

d.h. $L_2^* = \{\ \}$ $\qquad Z_2^* = -\infty$

14. Simplex-Tableau und -Algorithmus

a) Anfangstableau

I		-30	0	0		
		x_3	x_{S1}	x_{S2}		
-50	x_2	0,5	-0,5	0	6	12
-10	x_4	**0,5**	0	-0,25	2	**4**
		0	25	2,5	-320	

Es gilt:

- $\tilde{c}_j \geq 0 \quad \forall\ j$ $\Rightarrow$ Basislösung ist optimal
- $\tilde{c}_3 = 0$ $\Rightarrow$ Optimallösung ist nicht eindeutig

b*) Basistausch (Simplex-Algorithmus)

II		-10	0	0		
		x_4	x_{S1}	x_{S2}		
-50	x_2	-1	-0,5	0,25	4	---
-30	x_3	**2**	0	-0,5	4	**2**
		0	25	2,5	-320	

- Menge der optimalen Basislösungen:

$$B^* = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Menge aller Optimallösungen:

$$L^* = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4+2\delta \\ 4-4\delta \\ 2\delta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \delta \in [0,1] \right\}$$

- Menge aller ganzzahligen Optimallösungen:

$$L^* \cap \mathbf{Z}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

- minimaler Gesamtverschnitt:

$$Z^* = 50 + 320 = \mathbf{370}\ [\text{cm}]$$

c*) Änderung der Zielfunktion

- neue Zielfunktion: $Z' = (5+)\ x_2 + x_3 + x_4 \ \rightarrow\ \min!$

- modifiziertes Anfangstableau:

I		-1	0	0		
		x_3	x_{S1}	x_{S2}		
-1	x_2	0,5	-0,5	0	6	12
-1	x_4	**0,5**	0	-0,25	2	**4**
		0	0,5	0,25	-8	

- Simplex-Iteration (wie oben):

II		-1	0	0		
		x_4	x_{S1}	x_{S2}		
-1	x_2	-1	-0,5	0,25	4	---
-1	x_3	**2**	0	-0,5	4	**2**
		0	0,5	0,25	-8	

$\Rightarrow$ gleiche Optimallösung wie oben, jedoch

$Z'^* = 5 + 8 =$ **13** [Bretter]

15. Lineare Optimierung / 2-Phasen-SA

a) Formulierung und Lösung des linearen Programms

- Hilfsprogramm in kanonischer Form:

Z_H: $\quad - x_H \rightarrow \max!$

N_H:
$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 + x_{S1} &= 1800 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_{S2} &= 900 \\ x_1 + x_2 - x_{S3} + x_H &= 120 \end{aligned}$$

V_H: $\quad x_j \geq 0\ (j=1,2,3) \qquad x_{Si} \geq 0\ (i=1,2,3) \qquad x_H \geq 0$

- Anfangstableau / 1. Phase (Hilfsprogramm):

I		x_1	x_2	x_3	x_{S3}		
0	x_{S1}	3	9	8	0	1800	600
0	x_{S2}	3	3	2	0	900	300
-1	x_H	$\underline{\mathbf{1}}$	1	0	-1	120	**120**
		-1	-1	0	1	-120	

- 2. Phase (Lösung des ursprünglichen LP):

II		180	180	0		
		x_2	x_3	x_{S3}		
0	x_{S1}	6	<u>**8**</u>	3	1440	**180**
0	x_{S2}	0	2	3	540	270
90	x_1	1	0	-1	120	---
		-90	**-180**	-90	10800	

III		180	0	0		
		x_2	x_{S1}	x_{S3}		
180	x_3	0,75	0,125	0,375	180	480
0	x_{S2}	-1,5	-0,25	<u>**2,25**</u>	180	**80**
90	x_1	1	0	-1	120	---
		45	22,5	**-22,5**	43200	

IV		180	0	0	
		x_2	x_{S1}	x_{S2}	
180	x_3	1	0,167	-0,167	150
0	x_{S3}	-0,667	-0,111	0,444	80
90	x_1	0,333	-0,111	0,444	200
		30	20	10	45000

b) Interpretation des Endtableaus

- optimales Produktionsprogramm:

  $x_1^* = \mathbf{200}$ [Stück] $x_2^* = \mathbf{0}$ [Stück] $x_3^* = \mathbf{150}$ [Stück]

- maximaler Erlös: $Z^* = \mathbf{45.000}$ [€]

- Schlupfvariablen:

  $x_{S1}^* = x_{S2}^* = \mathbf{0}$ [Minuten] $\Rightarrow$ keine freien Kapazitäten

  $x_{S3}^* = \mathbf{80}$ [Stück] $\Rightarrow$ Übererfüllung der Lieferverpflichtung

- relative Bewertungskoeffizienten:

  $\tilde{c}_{S1} = \mathbf{20}$ [€/Min.] $\rightarrow$ Grenzerlös von Maschine A

  $\tilde{c}_{S2} = \mathbf{10}$ [€/Min.] $\rightarrow$ Grenzerlös von Maschine B

  $\tilde{c}_{S3} = \mathbf{0}$ [€/Stück] $\rightarrow$ „Grenzkosten“ der Bestellung

c) Auswirkung zusätzlicher Kapazität auf den Gewinn

Der Gewinn erhöht sich genau dann, wenn der Grenzerlös die Grenzkosten überschreitet.

$\tilde{c}_{S1} > 18$ $\Rightarrow$ zusätzliche Kapazität von A sinnvoll

$\tilde{c}_{S2} < 18$ $\Rightarrow$ zusätzliche Kapazität von B **nicht** sinnvoll

16. Lineare Optimierung / 2-Phasen-SA

a) Formulierung des linearen Programms

- LP in Normalform:

$$
\begin{array}{lrcl}
Z: & 500\,x_1 + 2000\,x_2 + 200\,x_3 & \rightarrow & \text{max !} \\
 & & & \\
N: & 4\,x_1 + 10\,x_2 + 2\,x_3 + x_{S1} & = & 170 \\
 & -0{,}25\,x_1 + 0{,}75\,x_2 - 0{,}25\,x_3 + x_{S2} & = & 0 \;{}^{*)} \\
 & x_1 - x_{S3} & = & 5 \\
 & x_2 - x_{S4} & = & 5 \\
 & x_3 - x_{S5} & = & 5 \\
 & & & \\
V: & x_j \geq 0 \; (j=1,2,3) & & x_{Si} \geq 0 \; (i=1,2,3,4,5)
\end{array}
$$

*) $\Leftrightarrow \; x_2 \leq 0{,}25\,(x_1+x_2+x_3)$

b) Lösung des LP

- Da die Schlupfvariablen x_{S1} und x_{S2} sofort als Basisvariablen dienen können, werden nur 3 Hilfsvariablen benötigt.

- Anfangstableau / 1. Phase (Hilfsprogramm):

I		x_1	x_2	x_3	x_{S3}	x_{S4}	x_{S5}		
0	x_{S1}	4	10	2	0	0	0	170	42,5
0	x_{S2}	-0,25	0,75	-0,25	0	0	0	0	---
-1	x_{H3}	**<u>1</u>**	0	0	-1	0	0	5	**5**
-1	x_{H4}	0	1	0	0	-1	0	5	---
-1	x_{H5}	0	0	1	0	0	-1	5	---
		-1	-1	-1	1	1	1	-15	

II		x_2	x_3	x_{S3}	x_{S4}	x_{S5}		
0	x_{S1}	10	2	4	0	0	150	75
0	x_{S2}	0,75	-0,25	-0,25	0	0	1,25	---
0	x_1	0	0	-1	0	0	5	---
-1	x_{H4}	1	0	0	-1	0	5	---
-1	x_{H5}	0	**<u>1</u>**	0	0	-1	5	**5**
		-1	**-1**	0	1	1	-10	

- 1. Phase (Fortsetzung):

III		x_2	x_{S3}	x_{S4}	x_{S5}		
0	x_{S1}	10	4	0	2	140	14
0	x_{S2}	**0,75**	-0,25	0	-0,25	2,5	**3,33**
0	x_1	0	-1	0	0	5	---
-1	x_{H4}	1	0	-1	0	5	5
0	x_3	0	0	0	-1	5	---
		-1	0	1	0	-5	

IV		x_{S2}	x_{S3}	x_{S4}	x_{S5}		
0	x_{S1}	-13,33	7,33	0	5,33	106,7	14,55
0	x_2	1,33	-0,33	0	-0,33	3,33	---
0	x_1	0	-1	0	0	5	---
-1	x_{H4}	-1,33	**0,33**	-1	0,33	1,67	**5**
0	x_3	0	0	0	-1	5	---
		1,33	**-0,33**	1	-0,33	-1,67	

- 2. Phase (Lösung des ursprünglichen LP):

V		0	0	0		
		x_{S2}	x_{S4}	x_{S5}		
0	x_{S1}	16	**22**	-2	70	**3,182**
2000	x_2	0	-1	0	5	---
500	x_1	-4	-3	1	10	---
0	x_{S3}	-4	-3	1	5	---
200	x_3	0	0	-1	5	---
		-2000	**-3500**	300	16000	

VI		0	0	0		
		x_{S2}	x_{S1}	x_{S5}		
0	x_{S4}	0,727	0,045	-0,091	3,182	---
2000	x_2	0,727	0,045	-0,091	8,182	---
500	x_1	-1,818	0,136	0,727	19,545	26,875
0	x_{S3}	-1,818	0,136	**0,727**	14,545	**20**
200	x_3	0	0	-1	5	---
		545,45	159,09	**-18,18**	27136	

- Endtableau:

VII		0	0	0	
		x_{S2}	x_{S1}	x_{S3}	
0	x_{S4}	0,5	0,0625	0,125	5
2000	x_2	0,5	0,0625	0,125	10
500	x_1	0	0	-1	5
0	x_{S5}	-2,5	0,1875	1,375	20
200	x_3	-2,5	0,1875	1,375	25
		500	162,5	25	27500

c) Interpretation des Endtableaus

- optimale zeitliche Verteilung der Werbespots:

tagsüber: $x_1^* = \mathbf{5}$ [Stück]
abends: $x_2^* = \mathbf{10}$ [Stück]
nachts: $x_3^* = \mathbf{25}$ [Stück]

- maximale Anzahl der Zuschauerkontakte:

$Z^* = 27.500$ [1000 Kontakte]

- Durchschnittskosten pro 1000 Zuschauerkontakte:

$$\overline{K} = \frac{b_1}{Z^*} = \frac{170}{27.500}\left[\frac{1000\,\text{Euro}}{1000\,\text{Kontakte}}\right]$$

$$= 0{,}00618\left[\frac{1000\,\text{Euro}}{1000\,\text{Kontakte}}\right] = \mathbf{6{,}18}\left[\frac{\text{Euro}}{1000\,\text{Kontakte}}\right]$$

- Grenzkosten pro 1000 Zuschauerkontakte:

$$\tilde{c}_{S1} = 162{,}5\left[\frac{1000\text{ Kontakte}}{1000\text{ Euro}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad K' = \frac{1}{\tilde{c}_{S1}} = \frac{1}{162{,}5}\left[\frac{1000\,\text{Euro}}{1000\,\text{Kontakte}}\right]$$

$$= 0{,}00615\left[\frac{1000\,\text{Euro}}{1000\,\text{Kontakte}}\right] = \mathbf{6{,}15}\left[\frac{\text{Euro}}{1000\,\text{Kontakte}}\right]$$

d) Sensitivitätsanalyse

- Endtableau mit Parameteränderung δ:

VII		0	0	0	
		x_{S2}	x_{S1}	x_{S3}	
0	x_{S4}	0,5	0,0625	0,125	5
2000	x_2	0,5	0,0625	0,125	10
500	x_1	0	0	-1	5
0	x_{S5}	-2,5	0,1875	1,375	20
200+δ	x_3	-2,5	0,1875	1,375	25
		500 – 2,5 δ	162,5 +0,1875 δ	25 +1,375 δ	27500 + 25 δ
optimal für ...		**$\delta \leq 200$**	$\delta \geq -866{,}7$	**$\delta \geq -18{,}182$**	

$\Rightarrow$ • Optimalitätsbedingung: $-18{,}182 \leq \delta \leq 200$

- Optimalitätsbereich des Bewertungskoeffizienten:

  $c_3 \in \left[\mathbf{181{,}818\,;400}\right]$ [1000 Zuschauer]

  D.h. die obige zeitliche Verteilung der Fernsehspots ist optimal, wenn die Zuschauerzahl nachts zwischen 181.818 und 400.000 liegt.

17. Duale lineare Programme

Duales LP zum Standard-Maximum-Problem LP_1

a) Dualproblem $\overline{LP}_1$

$$
\begin{array}{llllllll}
\overline{Z}_1: & -2\,y_1 + & 7\,y_2 + & 10\,y_3 + & 4\,y_4 & \rightarrow & \text{min !} \\
\\
\overline{N}_{11}: & y_1 + & y_2 + & y_3 & & \geq & 3 \\
\overline{N}_{21}: & -2\,y_1 + & y_2 & + & y_4 & \geq & -1 \\
\\
\overline{V}_1: & y_1 \geq 0 & y_2 \geq 0 & y_3 \geq 0 & y_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

b*) Lösung von $\overline{LP}_1$ mit Hilfe der Dualitätssätze

Für das **primale LP_1** gilt (vgl. Aufgabe 13):

$$x_1^* > 0 \quad x_2^* > 0 \quad x_{S1}^* = 0 \quad x_{S2}^* = 0 \quad x_{S3}^* > 0 \quad x_{S4}^* > 0$$

$\Rightarrow$ Für das **duale $\overline{LP}_1$** gilt ...

- wegen Complementary Slackness (5.14):

$$y_{S1}^* = 0 \quad y_{S2}^* = 0 \quad y_1^* \geq 0 \quad y_2^* \geq 0 \quad y_3^* = 0 \quad y_4^* = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \overline{N}_{11}: & y_1^* + y_2^* = 3 \\ \overline{N}_{21}: & -2y_1^* + y_2^* = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{L}_1^* = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{4/3} \\ \mathbf{5/3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}$$

- wegen der starken Dualität (5.13): $\overline{Z}_1^* = Z_1^* = \mathbf{9}$

Duales LP zum Standard-Minimum-Problem LP_2

a) Dualproblem $\overline{LP}_2$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\overline{Z}_2: & -2\,y_1 & + & 7\,y_2 & + & 10\,y_3 & + & 4\,y_4 & \rightarrow & \max ! \\
 & & & & & & & & & \\
\overline{N}_{12}: & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & \leq & -3 \\
\overline{N}_{22}: & -2\,y_1 & + & y_2 & & & + & y_4 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & & & \\
\overline{V}_2: & y_1 \geq 0 & & y_2 \geq 0 & & y_3 \geq 0 & & y_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

b*) Lösung von $\overline{LP}_2$ mit Hilfe der Dualitätssätze

Für das **primale LP_2** gilt (vgl. Aufgabe 13):

Z_2 ist unbeschränkt in L_2, d.h. $L_2^* = \{\ \}$.

$\Rightarrow$ Für das **duale $\overline{LP}_2$** gilt ...

- wegen schwacher Dualität (5.10):

  $\overline{L}_2 = \{\ \}$ (keine zulässige Lösung)

  $\Rightarrow \quad \overline{L}_2^* = \{\ \}$

18. Dualität bei NS-Spielen / Dualer SA

a) LP für den Spieler A in Standardform

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Z:} & -x_1 - x_2 - x_3 & \rightarrow & \max ! \\
\\
\text{N:} & -3x_1 - 10x_2 - 9x_3 & \leq & -1 \\
 & -4x_1 - 6x_2 - 8x_3 & \leq & -1 \\
 & -11x_1 - 9x_2 - 7x_3 & \leq & -1 \\
\\
\text{V:} & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

b) Anfangstableau für LP_A

I		-1	-1	-1	
		x_1	x_2	x_3	
0	x_{S1}	-3	-10	-9	-1
0	x_{S2}	-4	-6	**<u>-8</u>**	**-1**
0	x_{S3}	-11	-9	-7	-1
		1	1	1	0
		-0,25	-0,167	**-0,125**	

c*) Lösung von LP_A mit dualem Simplex-Algorithmus

- Anfangstableau (s.o.):

I		-1	-1	-1	
		x_1	x_2	x_3	
0	x_{S1}	-3	-10	-9	-1
0	x_{S2}	-4	-6	**-<u>8</u>**	**-1**
0	x_{S3}	-11	-9	-7	-1
		1	1	1	0
		-0,25	-0,167	**-0,125**	

- Iterationen (dualer Simplex-Algorithmus):

II		-1	-1	0	
		x_1	x_2	x_{S2}	
0	x_{S1}	1,5	-3,25	-1,125	0,125
-1	x_3	0,5	0,75	-0,125	0,125
0	x_{S3}	**-<u>7,5</u>**	**-<u>3,75</u>**	-0,875	**-0,125**
		0,5	0,25	0,125	-0,125
		-0,067	**-0,067**	-0,143	

$\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten für die Wahl der Pivotspalte!

- 2 optimale Basislösungen:

III		0	-1	0		
		x_{S3}	x_2	x_{S2}		
0	x_{S1}	0,2	-4	-1,3	0,1	---
-1	x_3	0,067	0,5	-0,183	0,117	0,233
-1	x_1	-0,133	<u>**0,5**</u>	0,117	0,017	**0,033**
		0,067	**0**	0,067	-0,133	

III'		0	-1	0		
		x_{S3}	x_1	x_{S2}		
0	x_{S1}	-0,867	8	-0,367	0,233	0,029
-1	x_3	0,2	-1	-0,3	0,1	---
-1	x_2	-0,267	<u>**2**</u>	0,233	0,033	**0,017**
		0,067	**0**	0,067	-0,133	

- Menge der optimalen Basislösungen von LP_A:

$$B_A^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0{,}017 \\ 0 \\ 0{,}117 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}033 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/60 \\ 0 \\ 7/60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/60 \\ 6/60 \end{pmatrix} \right\}$$

- Menge aller Optimallösungen von LP_A:

$$L_A^* = \left\{ \begin{pmatrix} \delta/60 \\ (1-\delta)/30 \\ (6+\delta)/60 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \delta \in [0{,}1] \right\}$$

- optimaler Wert der Zielfunktion von LP_A:

$$Z_A^* = 0{,}133 = \mathbf{\frac{2}{15}}$$

- Menge aller gemischten Minimax-Strategien von A:

$$\overset{(5.23)}{\Rightarrow} \quad P^* = \left\{ \begin{pmatrix} \delta/8 \\ (1-\delta)/4 \\ (6+\delta)/8 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \delta \in [0{,}1] \right\}$$

d*) Lösung von LP_B (vgl. Tableaus III und III') *)

*) Die Optimallösung ist eindeutig, aber überbestimmt! (Degeneration)

- Menge aller Optimallösungen von LP_B:

$$L_B^* = B_B^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}067 \\ 0{,}067 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/15 \\ 1/15 \end{pmatrix} \right\}$$

- optimaler Wert der Zielfunktion:

$$Z_B^* \overset{(5.13)}{=} Z_A^* = 0{,}133 = \mathbf{\frac{2}{15}}$$

- Menge aller gemischten Minimax-Strategien von B:

$$\overset{(5.25)}{\Rightarrow} \quad Q^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right\}$$

- Wert des Nullsummen-Spiels:

$$E\left[G \,\middle|\, \mathbf{p^*}, \mathbf{q^*}\right] \overset{(5.26)}{=} \frac{1}{2/15} = \mathbf{7{,}5}\ [€]$$

D.h. das Spiel wäre fair, wenn Spieler A an Spieler B einen Ausgleichsbetrag von 7,50 € zahlen würde.

19. Postoptimale Analysen

a) Erhöhung des Absatzpreises c_2

- Erweitertes Endtableau (vgl. Aufgabe 15):

IV		$180+\delta$	0	0		
		x_2	x_{S1}	x_{S2}		
180	x_3	**1**	0,167	-0,167	150	**150**
0	x_{S3}	-0,667	-0,111	0,444	80	---
90	x_1	0,333	-0,111	0,444	200	600
		$30-\delta$	20	10	45000	
		$\delta\leq 30$	---	---	$]-\infty,30]$	

- Parametrische Optimierung (primaler SA):

V		180	0	0		
		x_3	x_{S1}	x_{S2}		
$180+\delta$	x_2	1	0,167	-0,167	150	---
0	x_{S3}	0,667	0	0,333	180	540
90	x_1	-0,333	-0,167	**0,5**	150	**300**
		$-30+\delta$	$15+0{,}167\delta$	$15-0{,}167\delta$	$40500+150\delta$	
		$\delta\geq 30$	$\delta\geq -90$	$\delta\leq 90$	$[30,90]$	

- Parametrische Optimierung (Fortsetzung):

VI		180	0	90	
		x_3	x_{S1}	x_1	
180**+δ**	x_2	0,889	0,111	0,333	200
0	x_{S3}	0,889	0,111	-0,667	80
0	x_{S2}	-0,667	-0,333	2	300
		-20 **+0,889δ**	20 **+0,111δ**	-30 **+0,333δ**	36000 **+200δ**
		δ≥22,5	δ≥-180	δ≥90	**[90,∞[**

- Ergebnis der parametrischen Optimierung:

Tableau	δ	$\mathbf{c_2}$	$\mathbf{x_1^*}$	$\mathbf{x_2^*}$	$\mathbf{x_3^*}$	**Z***
IV	-180→30	0 →210	200	0	150	45000
V	30→90	210→270	150	150	0	40500+150δ
VI	90→ ∞	270→ ∞	0	200	0	36000+200δ

b) Kapazitätserweiterung beim Maschinentyp A

- Erweitertes Endtableau (vgl. Aufgabe 15):

IV		180	0	0		
		x_2	x_{S1}	x_{S2}		
180	x_3	1	0,167	-0,167	150**+0,167**δ	$\delta \geq -900$
0	x_{S3}	**-0,667**	-0,111	0,444	80**-0,111**δ	$\delta \leq$ **720**
90	x_1	0,333	-0,111	0,444	200**-0,111**δ	$\delta \leq 1800$
		30	20	10	45000**+20**δ	**[-900,720]**
		-45	-180	---		

- Parametrische Optimierung (dualer SA):

V		0	0	0		
		x_{S3}	x_{S1}	x_{S2}		
180	x_3	1,5	0	0,5	270	---
180	x_2	-1,5	0,167	-0,667	-120**+0,167**δ	$\delta \geq 720$
90	x_1	0,5	-0,167	0,667	240**-0,167**δ	$\delta \leq 1440$
		45	15	30	48600**+15**δ	**[720,1440]**
			< 18			

$\Rightarrow$ • optimale Zusatzkapazität: $\delta =$ **720** [Minuten]

- Gewinnsteigerung: $\Delta Z = 720 \cdot (20 - 18) =$ **1440** [€]

20. Klassisches Transportproblem

a) Formulierung des linearen Programms

- LP in Gleichungs-Schreibweise:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\text{Z:} & \multicolumn{10}{l}{2x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+2x_{14}+5x_{21}+3x_{22}+5x_{23}+6x_{24} \rightarrow \min !} \\
\text{N:} & x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13}+ & x_{14} & & & & & = & 800 \\
 & & & & & x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23}+ & x_{24} & = & 1000 \\
 & x_{11} & & & & +\ x_{21} & & & & = & 300 \\
 & & x_{12} & & & & +\ x_{22} & & & = & 500 \\
 & & & x_{13} & & & & +\ x_{23} & & = & 400 \\
 & & & & x_{14} & & & & +\ x_{24} & = & 600 \\
\text{V:} & \multicolumn{10}{l}{x_{ij} \geq 0 \quad (\, i=1,2 \,;\, j=1,2,3,4)}
\end{array}
$$

- LP in Matrix-Schreibweise:

Z: $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{pmatrix} \rightarrow \min!$$

N: $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \\ 300 \\ 500 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix}$$

V:
$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}' \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}'$$

Die Koeffizientenmatrix **A** ist singulär: r(**A**) = 5 .

(Für die Zeilen gilt: $\mathbf{a_1}' + \mathbf{a_2}' - \mathbf{a_3}' - \mathbf{a_4}' - \mathbf{a_5}' - \mathbf{a_6}' = \mathbf{o}'$.)

b*) Optimierung (MODI-Verfahren)

Anfangslösung

- Die von L_3 an die Kunden zu liefernden Einheiten werden ersatzweise von L_2 geliefert. Damit werden die Bestände von L_1 und L_2 vollständig aufgebraucht.

- Transportmatrix (x_{ij}) (= primale Basislösung):

I	K_1	K_2	K_3	K_4	v_i
L_1	**300**	0	0	**500**	800
L_2	**0**	**500**	**400**	**100**	1000
b_j	300	500	400	600	1800

- Transportkosten:

$$Z = 2 \cdot 300 + 2 \cdot 500 + 3 \cdot 500 + 5 \cdot 400 + 6 \cdot 100 = \mathbf{5700}\ [€]$$

- Opportunitätskostenmatrix ($\tilde{c}_{ij}$) (= duale Basislösung):

I	K_1	K_2	K_3	K_4	y_i
L_1	**2** / 0	4 / 5	3 / 2	**2** / 0	**0**
L_2	5 / **<u>-1</u>**	**3** / 0	**5** / 0	**6** / 0	**4**
z_j	**2**	**-1**	**1**	**2**	

Iteration („Stepping Stone“)

- Transportmatrix (x_{ij}) (= primale Basislösung):

II	K_1	K_2	K_3	K_4	v_i
L_1	**200**	0	0	**600**	800
L_2	**100**	**500**	**400**	0	1000
b_j	300	500	400	600	1800

- Transportkosten:

$$Z = 2 \cdot 200 + 2 \cdot 600 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + 5 \cdot 400 = \mathbf{5600}\ [€]$$

- Opportunitätskostenmatrix ($\tilde{c}_{ij}$) (= duale Basislösung):

I	K_1	K_2	K_3	K_4	y_i
L_1	**2** / 0	4 / 4	3 / 1	**2** / 0	**0**
L_2	**5** / 0	**3** / 0	**5** / 0	6 / 1	**3**
z_j	**2**	**0**	**2**	**2**	

$\tilde{c}_{ij} > 0 \quad \forall\, j \qquad \Rightarrow$ eindeutig optimaler Transportplan