

Aufgaben zum Tutorium

Empirische Methoden II

**(Wahrscheinlichkeitsrechnung
und Schließende Statistik)**

1. **Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung**
2. **Anwendungen der Kombinatorik**
3. **Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
4. **Lineare Transformation; Summen von Zufallsvariablen**
5. **Gleichverteilungen und Binomialverteilung**
6. **Hypergeometrische, Poisson- und Exponentialverteilung**
7. **Normalverteilung; Zentraler Grenzwertsatz**
8. **Zusammenhänge zwischen speziellen Verteilungen**
9. **Grundlagen der Schließenden Statistik**
10. **Schätzung unbekannter Parameter**
11. **Parametrische Testverfahren**
12. **Nicht-parametrische Testverfahren**

Tutorium 1: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Stichworte:**
- Zufallsprozess, Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignisse
 - Axiome und Rechengesetze für Wahrscheinlichkeiten
 - Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

Aufgabe 1

Ein schwarzer und ein weißer Würfel werden geworfen. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:

- A: Der Schwarze Würfel zeigt die Augenzahl 6.
 B: Der weiße Würfel zeigt eine gerade Augenzahl.
 C: Die Summe der beiden Augenzahlen ist größer als 8.

- Wie muss die Ergebnismenge dargestellt werden, damit es sich um einen Laplace-Prozess handelt? Wie viele Elementarereignisse gibt es, und wie viele Ereignisse gibt es insgesamt? Geben Sie die oben angegebenen Ereignisse A, B und C in aufzählender Form (d.h. als Teilmenge der Ergebnismenge) an und bestimmen Sie $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$!
- Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse in Worten und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeit: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap C$, $B \cup C$ sowie $A \cap B \cap C$ und $A \cup B \cup C$.
- Bestimmen Sie unter Verwendung der De Morgan'schen Gesetze die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
 - der schwarze Würfel keine 6 zeigt **oder** die Augensumme kleiner als 9 ist;
 - der weiße Würfel eine ungerade Augenzahl zeigt **und** die Augensumme kleiner als 9 ist.
- Prüfen Sie die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse A und B, A und C bzw. B und C !
- Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A | C)$, $P(C | A)$, $P(B | C)$ und $P(C | B)$!

Aufgabe 2

In einem Statistik-Kurs wurde das Lernverhalten und der Erfolg in der Abschlussklausur untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass sich 60% der Teilnehmer regelmäßig in Lerngruppen trafen, um die Vorlesung nachzuarbeiten (= Ereignis L). Von diesen bestanden 95% die Abschlussklausur (= Ereignis B), während die Durchfallquote insgesamt 25% betrug. 70% aller Kursteilnehmer besuchten ein freiwilliges Tutorium (= Ereignis T). Bei den Tutoriumsbesuchern war die Durchfallquote um 10 Prozentpunkte geringer als bei den Teilnehmern, die kein Tutorium besucht hatten. 42% aller Teilnehmer gaben an, regelmäßig ein Tutorium und eine Lerngruppe besucht zu haben.

- Drücken Sie die obigen Untersuchungsergebnisse in Form von Wahrscheinlichkeiten aus! Verwenden Sie dabei die Bezeichnungen B, L und T für die Ereignisse! Welche Ereignisse sind stochastisch unabhängig?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studierender die Klausur bestanden hat, wenn er ein Tutorium (bzw. kein Tutorium) besucht hat?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer ...
 - in einer Lerngruppe gearbeitet und die Klausur bestanden hat?
 - zwar in einer Lerngruppe gearbeitet, aber die Klausur nicht bestanden hat?
 - nicht in einer Lerngruppe gearbeitet, aber trotzdem die Klausur bestanden hat?
 - weder in einer Lerngruppe gearbeitet noch die Klausur bestanden hat?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer die Klausur bestanden hat, wenn er die Vorlesung nicht in einer Lerngruppe nachgearbeitet hat?

Tutorium 2: Anwendungen der Kombinatorik

- Stichworte:**
- Laplace-Prozess
 - Urnenmodell
 - Kombinationen, Variationen, Permutationen

Aufgabe 1

In einer Urne befinden sich 20 weiße, 30 rote und 50 schwarze Kugeln.

- a) Bei einer Zufallsziehung **mit** Zurücklegen werden aus der Urne drei Kugeln entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...
- keine rote Kugel gezogen wird?
 - jeweils eine weiße, eine rote und eine schwarze Kugel gezogen wird?
 - drei Kugeln derselben Farbe gezogen werden?
 - im ersten und zweiten Zug dieselbe Farbe und im dritten Zug eine andere Farbe gezogen wird?
 - genau zwei der gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben?
- b) Bei einer Zufallsziehung **ohne** Zurücklegen werden aus der Urne drei Kugeln entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...
- mindestens eine rote Kugel gezogen wird?
 - jeweils eine weiße, eine rote und eine schwarze Kugel gezogen wird?
 - drei Kugeln derselben Farbe gezogen werden?
 - im zweiten (bzw. dritten) Zug eine rote Kugel gezogen wird?
 - im ersten und zweiten Zug dieselbe Farbe und im dritten Zug eine andere Farbe gezogen wird?

Aufgabe 2

Fünf befreundete Paare (A, B, C, D, E) feiern zusammen ein Fest.

- a) Wie oft erklingen die Gläser, wenn jede Person mit jeder einmal anstößt?
- b) Für die Tischordnung wird jedem Mann zufällig eine Frau zugeordnet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jedem Mann seine eigene Frau zugewiesen wird?
- c) Vor jedem der vier Gänge des Festessens wird zufällig eine Person ausgelost, die eine kleine Ansprache halten muss. Wie viele Möglichkeiten der Auswahl der vier Personen gibt es? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gastgeberin Frau A. keine (bzw. genau eine) Rede halten muss?
- d) Für ein Gesellschaftsspiel werden 4 Personen ausgelost. Wie viele Möglichkeiten der Auswahl gibt es hierfür? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...
- 2 Frauen und 2 Männer ausgelost werden?
 - 4 Frauen oder 4 Männer ausgelost werden?
 - der Gastgeber Herr A. unter den ausgelosten Personen ist?

Tutorium 3: Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Stichworte:**
- diskrete/stetige Zufallsvariable, Wertebereich
 - Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion, Verteilungsfunktion
 - Erwartungswert, Varianz

Aufgabe 1

In der Tabelle ist für die diskrete Zufallsvariable X die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x)$ angegeben.

x_i	0	1	2	3	4
$p(x_i)$	0,10	0,25	0,40	0,20	0,05

- Ermitteln Sie die Werte der Verteilungsfunktion von X und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion!
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X !

Aufgabe 2

Für ein Würfelspiel mit einem regulären Würfel, bei dem der Einsatz 3 Euro beträgt, gilt folgender Auszahlungsplan:

Augenzahl	Auszahlung
1,2,3	0 Euro
4,5	3 Euro
6	6 Euro

- Bestimmen Sie die Werte der Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X „Gewinn“ (= Auszahlung – Einzahlung) ! Wie groß ist $P(X > 0)$?
- Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X ! Bei welchem Einsatz wäre das Spiel fair?

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable X hat im Wertebereich $[0; b]$ die Dichtefunktion $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x$.

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ und die Intervallobergrenze b ! Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ im Intervall $[-1; 4]$!
- Berechnen Sie $E[X]$ und $V[X]$ sowie $P(X > 1)$ und $P(|X - 1| < 1)$!

Aufgabe 4

Welche beiden Eigenschaften muss die Dichtefunktion $f(x)$ einer stetigen Zufallsvariablen X haben? Weisen Sie nach, dass die folgende Funktion $f(x)$ die Eigenschaften einer Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} 0,75x^2 + 0,75 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $P(X \leq 0,5)$ sowie $E[X]$ und $V[X]$!

Tutorium 4: Lineare Transformation; Summen von Zufallsvariablen

- Stichworte:**
- lineare Transformation
 - Standardisierung
 - stochastische Unabhängigkeit
 - Summen von Zufallsvariablen

Aufgabe 1

Im Spiel von Aufgabe 2 aus dem Tutorium 3 spielt Spieler A das Spiel einmal mit 300 Euro Einsatz; entsprechend erhält er auch die 100fache Auszahlung. Spieler B hingegen wiederholt das Spiel 100mal mit je 3 Euro Einsatz. Die (Gesamt-)Gewinne der beiden Spieler sind X_A und X_B . Worin unterscheiden sich diese beiden Zufallsvariablen?

Aufgabe 2

Eine Zufallsvariable X hat im Wertebereich $W = \{1,2,3,4\}$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_X(x) = a \cdot x$ und die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

- Ermitteln Sie den Wert a und geben Sie die Funktionen p_X und F_X in Form einer Wertetabelle an! Berechnen Sie $E[X]$ und $V[X]$!
- Die Zufallsvariable X wird gemäß $Y=2X-2$ transformiert. Bestimmen Sie W_Y , p_Y , F_Y , $E[Y]$ und $V[Y]$!

Aufgabe 3

Durch welche lineare Transformation wird die Zufallsvariable X in Aufgabe 1 aus dem Tutorium 3 standardisiert? Bestimmen Sie für die standardisierte Zufallsvariable Z den Wertebereich sowie die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion!

Aufgabe 4

In der folgenden Tabelle sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der beiden stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X und Y wiedergegeben.

x_i	$p_X(x_i)$	y_j	$p_Y(y_j)$
0	0,2	1	0,6
1	0,8	2	0,4

- Berechnen Sie für X und Y jeweils den Erwartungswert und die Varianz!
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable $X+Y$ sowie deren Erwartungswert und Varianz!
- Die Zufallsvariablen X_t ($t=1, \dots, 5$) sind von einander stochastisch unabhängig und haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung wie die Zufallsvariable X . Bestimmen Sie für die Summen-Zufallsvariable $S_5 = \sum_{t=1}^5 X_t$ den Wertebereich sowie den Erwartungswert und die Varianz!

Tutorium 5: Gleichverteilungen und Binomialverteilung

- Stichworte:**
- Diskrete und stetige Gleichverteilung
 - Urnenmodell mit Zurücklegen
 - Zusammenhang zwischen Bernoulli- und Binomialverteilung
 - Reproduktivität

Aufgabe 1

Bei einem Glücksspiel ist der Gewinn für einen Spieler eine Zufallsvariable $X \sim G(-2; -1; 0; 1)$.

- Berechnen Sie $E[X]$ und $V[X]$!
- Ein Spieler spielt das Spiel zweimal hintereinander. Wie ist die Summe der beiden (stochastisch unabhängigen) Gewinne $Y_2 = X_1 + X_2$ verteilt? Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_Y(y)$ in Form einer Wertetabelle an! Berechnen Sie daraus $E[Y_2]$ und $V[Y_2]$!
- Wie groß sind $E[Y_n]$ und $V[Y_n]$, wenn der Spieler das Glücksspiel n -mal wiederholt?

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable X ist im Intervall $[-2; 6]$ Rechteck-verteilt:

- Geben Sie die Dichtefunktion $f(x)$ und die Verteilungsfunktion $F(x)$ an und skizzieren Sie die beiden Funktionen im Intervall $[-4; 8]$!
- Ermitteln Sie $E[X]$ und $V[X]$!
- Bestimmen Sie $P(X < 0)$, $P(|X| \leq 1)$ und $P(X \leq 2 \mid X > 0)$!

Aufgabe 3

Wie ist die Zufallsvariable S_5 in Aufgabe 4 c) aus dem Tutorium 4 verteilt? Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion in Form einer Wertetabelle an! Bestimmen Sie auf zwei verschiedene Weisen $E[S_5]$ und $V[S_5]$!

Aufgabe 4

In einem Unternehmen haben 10% der in großer Zahl vorhandenen Belege einen Formfehler. Ein Wirtschaftsprüfer wählt zufällig 10 Belege aus.

- Wie ist die Anzahl der Belege in dieser Stichprobe verteilt? (Begründung!)
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wirtschaftsprüfer mehr als einen fehlerhaften Beleg findet?
- Bestimmen Sie die Quartile der Verteilung von X !

Tutorium 6: Hypergeometrische, Poisson- & Exponentialverteilung

- Stichworte:**
- Urnenmodell ohne Zurücklegen
 - Approximationen
 - „Zeit-Modell“
 - Zusammenhang zwischen Poisson- und Exponentialverteilung

Aufgabe 1

Aus einer Urne, in der sich 8 weiße und 2 schwarze Kugeln befinden, wird eine Stichprobe vom Umfang 3 **mit** bzw. **ohne** Zurücklegen gezogen.

- Wie lautet jeweils die Ergebnismenge bei diesem Zufallsprozess?
- Wie ist jeweils die Zufallsvariable X „Anzahl der schwarzen Kugeln in der Stichprobe“ verteilt? Bestimmen Sie den Wertebereich, die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion (einschließlich Wertetabelle) sowie Erwartungswert und Varianz!

Aufgabe 2

In einem Fertigungslos von 1000 Glühbirnen sind 30 defekte Glühbirnen. In der Qualitätskontrolle werden 50 zufällig ausgewählte Glühbirnen überprüft.

- Was ist die exakte Verteilung der Zufallsvariable X „Anzahl der defekten Glühbirnen in der Stichprobe“, wenn mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen wurde?
- Durch welche einfacheren Verteilungen können die exakten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X approximiert werden?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer 50er-Stichprobe genau eine Glühbirne defekt ist!

Aufgabe 3

An einem Online-Anschluss werden in unregelmäßigen Abständen pro Minute durchschnittlich zwei Informationen abgefragt.

- Wie ist die Anzahl der Abfragen in einer Minute verteilt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Minute ...
 - genau eine Information abgefragt wird?
 - mindestens eine Information abgefragt wird?
 - zwei oder drei Informationen abgefragt werden?
- Wie ist die Anzahl der Abfragen in einer Stunde verteilt?
- Wie ist die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Online-Abfragen verteilt?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es (zu einem beliebigen Zeitpunkt) länger als fünf Minuten dauert, bis die nächste Abfrage erfolgt!

Tutorium 7: Normalverteilung; Zentraler Grenzwertsatz

- Stichworte:**
- Standardnormalverteilung
 - Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$, Quantile, Symmetriebeziehungen
 - Standardisierung
 - Zentraler Grenzwertsatz (Voraussetzungen, Aussage)

Aufgabe 1

Z sei eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten:

$$\bullet P(Z \geq 0,25) \quad \bullet P(0,4 \leq Z \leq 1,4) \quad \bullet P(|Z| \geq 0,25) \quad \bullet P(|Z-1| \geq 0,25) \quad \bullet P(0,4 < |Z| < 1,4)$$

b) Ermitteln Sie (näherungsweise) die „Quintile“ $z_{0,2}$, $z_{0,4}$, $z_{0,6}$ und $z_{0,8}$ sowie die Werte z , für die gilt:

$$\bullet P(Z \geq z) = 0,9 \quad \bullet P(0,63 \leq Z \leq z) = 0,2 \quad \bullet P(|Z| \leq z) = 0,25$$

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = -4$ und $\sigma^2 = 0,25$.

a) Berechnen Sie:

$$\bullet f_N(-4,5|-4;0,25) \quad \bullet F_N(-4,5|-4;0,25) \quad \bullet P(X > -4,5) \quad \bullet P(-4,5 \leq X \leq -3,5) \quad \bullet P(|X+4| \geq 0,5)$$

b) Bestimmen Sie x mit:

$$\bullet P(X < x) = 0,8849 \quad \bullet P(X > x) = 0,7257 \quad \bullet P(|X+4| \geq x) = 0,2301 \quad \bullet P(x < X < -3) = 0,8185$$

Aufgabe 3

Wie sind die Zufallsvariablen $Y_{60} = \sum_{t=1}^{60} X_t$ und $\bar{X}_{60} = \frac{1}{60} \sum_{t=1}^{60} X_t$ verteilt, wenn die einzelnen Summanden X_t ($t=1, \dots, 60$) voneinander stochastisch unabhängig sind und jeweils ...

- a) Bernoulli-verteilt sind mit $\pi = 0,25$? (\rightarrow Urnenmodell: Interpretation?)
- b) gleichverteilt sind im Wertebereich $\{1,2,3,4,5,6\}$? (\rightarrow Würfel: Interpretation?)

Tutorium 8: Zusammenhänge zwischen speziellen Verteilungen

- Stichworte:**
- Zusammenhänge zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - Approximation anderer Verteilungen durch die Normalverteilung
 - Stetigkeitskorrektur

Aufgabe 1

Durch welche (einfacheren) Verteilungen lassen sich die folgenden Verteilungen approximieren?

- $B(40;0,03)$
- $H(40;50;100)$
- $G(1,2,\dots,40)$
- $P(40)$
- $\chi^2(40)$
- $t(40)$

Aufgabe 2

Betrachtet wird der Gewinn des Spielers B in der Aufgabe 1 des Tutoriums 4.

- a) Wie ist der Gewinn von B verteilt? Begründen Sie, warum hier der Zentrale Grenzwertsatz gilt!
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B mehr als 80 Euro verliert?
- c) Angenommen, der Spieler B ist spielsüchtig und wiederholt das Spiel immer wieder. Was sagt das Gesetz der großen Zahl dann aus?

Aufgabe 3

Betrachtet wird die Anzahl der Online-Abfragen in einer Stunde in der Aufgabe 3 c) des Tutoriums 6.

- a) Durch welche Verteilung kann hier die Poisson-Verteilung approximiert werden?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stunde mehr als 100 Informationen abgefragt werden?

Aufgabe 4

Bei einer Fluggesellschaft erscheinen erfahrungsgemäß 10% der Passagiere nicht zu ihrem gebuchten Flug.

- a) Wie sind die Zufallsvariablen X „Anzahl der tatsächlich belegten Plätze“ und Y „Anzahl der nicht belegten Plätze“ in einem Flugzeug verteilt, wenn alle 144 Plätze der Maschine ausgebucht sind (und sich die Passagiere unabhängig voneinander verhalten)?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer ausgebuchten Maschine mindestens zwölf Plätze nicht belegt werden?
- c) Statt der 144 Buchungen nimmt die Gesellschaft 150 Buchungen an. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle erscheinenden Passagiere mit der Maschine befördert werden können?

Tutorium 9: Grundlagen der Schließenden Statistik

- Stichworte:**
- Grundgesamtheit, Verteilungsparameter
 - Stichprobe mit/ohne Zurücklegen, Auswahlssatz
 - Uneingeschränkte Zufallsauswahl, einfache Zufallsstichprobe
 - Stichprobenergebnis, Stichprobenfunktion, Schätzfunktion
 - Schwankungsintervall (Inklusionsschluss)

Aufgabe 1

Welche der folgenden Zufallsprozesse können als Ziehung einer einfachen Zufallsstichprobe interpretiert werden? (Begründung!)

- Würfel mit 6 Würfeln;
- Ziehung der Lottozahlen 6 aus 49;
- Vergabe von 10 der insgesamt 32 Spielkarten an einen Spieler;
- Bevölkerungsstichprobe, in der jeder Geburtsjahrgang mit 20 Personen vertreten ist;
- Geschwindigkeitskontrolle bei jedem hundertsten Fahrzeug, das eine bestimmte Stelle passiert.

Aufgabe 2

Ein Winzer füllt seine 0,75-Liter--Flaschen maschinell ab. Wegen des näherungsweise mit $\mu = 0$ [Liter] und $\sigma^2 = 0,0004$ [Liter²] normalverteilten Abfüllfehlers ist die Maschine auf 0,752 [Liter] eingestellt. Ferner sind von den verwendeten Korken erfahrungsgemäß 3% fehlerhaft. Ein Kunde lässt sich 32 Kartons mit je 12 Flaschen schicken.

- Was ist hier die Gesamtheit und was die Stichprobe? Handelt es sich um eine einfache Zufallsstichprobe? Wie sind die Abfüllmenge einer Flasche, die durchschnittliche Abfüllmenge und die Anzahl der fehlerhaft verkorkten Flaschen in der Sendung verteilt?
- Geben Sie ein 95%-Schwankungsintervall an für ...
 - den durchschnittlichen Flascheninhalt in der Sendung,
 - die Gesamtfüllmenge der Sendung,
 - den Anteil und
 - die Anzahl der fehlerhaft verkorkten Flaschen in der Sendung.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der durchschnittliche Flascheninhalt in der Sendung unter 0,75 [Liter] liegt?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie ergänzend zur Aufgabe 4 c) aus dem Tutorium 8 das 90%-, das 95%- und das 99%-Schwankungsintervall für die Anzahl der tatsächlich zum Flug erscheinenden Passagiere!

Tutorium 10: Schätzung unbekannter Parameter

- Stichworte:**
- Punktschätzung, Erwartungstreue, Konsistenz
 - Konfidenzintervall (Repräsentationsschluss)
 - homograde/heterograde Fall
 - notwendiger Stichprobenumfang
 - Korrektur für Stichproben ohne Zurücklegen

Aufgabe 1

Aus den 20.000 Studierenden an einer Hochschule werden 1600 für eine Befragung zufällig (ohne Zurücklegen) ausgewählt. In der Stichprobe gaben 360 Studierende an, nach dem BAföG gefördert zu werden. Außerdem ergab sich bei den monatlichen Aufwendungen für Miete ein Durchschnittswert von 198 [€] bei einer Standardabweichung von 59 [€].

- Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzwert an für die Anzahl der nach BAföG geförderten Studierenden an der Hochschule und die Aufwendungen aller Studierenden an der Hochschule für Miete!
- Berechnen Sie die 95%-Konfidenzintervalle für den Anteil und die Anzahl der nach BAföG geförderten Studierenden an der Hochschule!
- Berechnen Sie die 99%-Konfidenzintervalle für die durchschnittlichen Mietausgaben der Studierenden und die Gesamtaufwendungen der Studierenden an der Hochschule!

Aufgabe 2

An einer Tankstelle wird untersucht, wie viel Zeit die Kunden für einen Tankvorgang benötigen. Dazu wird die Zeit zwischen Abstellen des Motors und dem Betreten des Kassenraums zum Bezahlen bei fünf zufällig ausgewählten Kunden gemessen.

- Kann man von einer einfachen Zufallsstichprobe ausgehen, wenn an einem Tag der 100., 200., 300., 400. und 500. Kunde ausgewählt werden?
- Bei den zufällig ausgewählten Kunden werden folgende Zeiten gemessen: 3, 5, 4, 3, 5 [Minuten]. Bestimmen Sie damit eine erwartungstreue Punktschätzung für die mittlere Dauer des Tankvorgangs bei allen Kunden der Tankstelle!
- Berechnen Sie aus den Stichprobenergebnissen ein 95%-Konfidenzintervall für die mittlere Dauer des Tankvorgangs! Welche Annahme müssen Sie hier bezüglich der Grundgesamtheit treffen?

Aufgabe 3

Durch eine Zufallsstichprobe ohne Zurücklegen sollen die durchschnittlichen monatlichen Ausgaben der 14- bis 18-Jährigen in Deutschland für Audio-CDs bei einem Konfidenzniveau von 99% auf 1 [€] genau geschätzt werden. Aufgrund von Haushaltspanels kann man davon ausgehen, dass die Standardabweichung dieser Ausgaben maximal 20 [€] beträgt. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens gewählt werden?

Aufgabe 4

An einer Statistik-Klausur an einer großen Fakultät haben 400 Studierende teilgenommen. Wie viele (zufällig ausgewählte) Studierende müssen Sie mindestens nach ihrem Bestehen befragen, um die Durchfallquote mit einem Konfidenzniveau von 95% auf zehn Prozentpunkte genau zu schätzen?

Tutorium 11: Parametrische Testverfahren

- Stichworte:**
- parametrischer Test; einseitiger/zweiseitiger Test
 - Nullhypothese, Alternativhypothese, Testfunktion
 - Signifikanzniveau, kritischer Bereich
 - empirischer Wert, Testentscheidung, Fehlerarten
 - Korrektur für Stichproben ohne Zurücklegen

Aufgabe 1

Der Bekanntheitsgrad einer Biermarke bei den (erwachsenen) Bundesbürgern liegt seit Jahren bei 32%. Die Geschäftsleitung der Brauerei bezweifelt, dass sich der Bekanntheitsgrad durch eine jüngst durchgeführte Werbekampagne verändert hat. Deshalb lässt sie einen statistischen Test mit einem Signifikanzniveau von 5% durchführen, bei dem 500 zufällig ausgewählte Bundesbürger befragt werden. 178 Befragte geben dabei an, die Biermarke zu kennen.

- a) Wie sollte die Nullhypothese formuliert werden? Bestimmen Sie die Testfunktion und den kritischen Bereich! Was besagt hier das Signifikanzniveau?
- b) Welcher empirische Wert ergibt sich für die Testfunktion und wie lautet die Testentscheidung?
- c) Wie hoch muss die Zahl derjenigen, die die Biermarke kennen, in der Stichprobe mindestens sein, damit die Nullhypothese verworfen wird?

Aufgabe 2

In einer Wohnstraße wurde in einer einfachen Zufallsstichprobe mit 50 Fahrzeugen festgestellt, dass diese mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 46 [km/h] bei einer Varianz von 272 [km²/h²] befahren wird. Nach Einführung einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 30 [km/h] wurde an derselben Stelle erneut eine einfache Zufallsstichprobe mit 50 Fahrzeugen ausgewertet, wobei sich jetzt eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 42 [km/h] bei einer Varianz von 240 [km²/h²] ergab.

- a) Testen Sie bei einem Signifikanzniveau von 1% die Hypothese, dass sich Durchschnittsgeschwindigkeit der Fahrzeuge seit der Einführung der Geschwindigkeitsbegrenzung nicht verringert hat.
- b) Im Verkehrsamt der Stadt, wo man von der Wirksamkeit der Maßnahme überzeugt ist, wird das Testergebnis kritisiert. Wie könnte das Verkehrsamt argumentieren?

Aufgabe 3

In einer Region leben 46.000 Jugendliche, davon sind 22.540 weiblich. Ein Meinungsforschungsinstitut hat den Auftrag, das Freizeitverhalten dieser Jugendlichen zu analysieren, und plant dafür eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang 1225.

- a) Berechnen Sie jeweils ein 95%-Schwankungsintervall für den Anteil und die Anzahl weiblicher Jugendlicher in der Stichprobe und interpretieren Sie ersteres.
- b) Unter anderem soll geschätzt werden, wie viel Zeit Jugendliche in der Region durchschnittlich täglich für sportliche Aktivitäten aufwenden. Aufgrund ähnlicher Studien kann das Meinungsforschungsinstitut davon ausgehen, dass die Standardabweichung der dafür aufgewandten Zeit nicht über 30 [Min.] liegt. Reicht der vorgesehene Stichprobenumfang ($n=1225$) aus, um bei einem Konfidenzniveau von 95% eine Genauigkeit von 2 [Min.] zu erreichen?
- c) 32% der Befragten gaben an, Mitglied in einem Sportverein zu sein. Prüfen Sie anhand dieser Stichprobeninformation bei einem Signifikanzniveau von 5 % die Nullhypothese, dass weniger als 30% der Jugendlichen in der Region Mitglied in einem Sportverein sind. Geben Sie zu diesem Testproblem die Nullhypothese, den kritischen Bereich sowie den empirischen Wert der Testfunktion an und treffen Sie eine Entscheidung!

Tutorium 12: Nicht-parametrische Testverfahren

- Stichworte:**
- nicht-parametrischer Test
 - χ^2 -Anpassungstest
 - χ^2 -Unabhängigkeitstest
 - notwendiger Stichprobenumfang

Aufgabe 1

Ein Hersteller bietet sein Produkt in drei Versionen A, B und C an, deren Verkaufsanteile seit Jahren 65%, 25% und 10% betragen. Nach einer Werbekampagne für das Produkt soll durch eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang 200 bei einem Signifikanzniveau von 5% geprüft werden, ob sich die Verteilung bezüglich der drei Versionen geändert hat. In der Stichprobe wurde die Version A 136-mal, die Version B 40-mal und die Version C 24-mal verkauft.

Aufgabe 2

Eine Bank hat 10.000 Privatkunden. Davon haben 30% neben ihrem Giro-Konto noch ein weiteres Anlage-Konto bei der Bank. Die Bank plant eine Befragung der Privatkunden über ihre Zufriedenheit mit der individuellen Beratung durch die Bank. Dazu wird eine einfache Zufallsstichprobe von 800 Kunden ausgewählt.

- a) Bestimmen Sie das 95%-Schwankungsintervall für ...
 - den **Anteil** der Kunden in der Stichprobe die über ein Anlage-Konto verfügen;
 - die **Anzahl** der Kunden in der Stichprobe, die über ein Anlage-Konto verfügen.
- b) Bei einer Befragung von 800 zufällig ausgewählten Privatkunden der Bank betrug der Anteil der Kunden, die zufrieden oder sehr zufrieden mit der Beratung durch die Bank sind, 60%. Bestimmen Sie das 95%-Konfidenzintervall für ...
 - den **Anteil** der Privatkunden, die mit der Beratung zufrieden oder sehr zufrieden sind.
 - die **Anzahl** der Privatkunden, die mit der Beratung zufrieden oder sehr zufrieden sind.
- c) Bei der Befragung der 800 Privatkunden ergab sich bezüglich der Zufriedenheit mit der Beratung und dem Besitz eines Anlage-Kontos die folgende Aufteilung:

Konto-Besitz Zufriedenheit	nur Giro-Konto	Giro- und Anlage-Konto
gar nicht zufrieden	64	16
eher nicht zufrieden	200	40
zufrieden	216	104
sehr zufrieden	80	80

Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von 5% anhand dieser Stichprobe die Hypothese, dass die Zufriedenheit mit der Beratung unabhängig davon ist, welche Art von Konten die Privatkunden besitzen! Welchen Test wählen Sie? Prüfen Sie, ob der Stichprobenumfang groß genug ist!